

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Д. Е. Пчёлкина, В.М. Зюзьков

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТНЕМАТІСА  
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Учебно-методическое пособие

2016

## **Содержание**

Введение	3
Раздел 1. Дифференциальное исчисление	4
Раздел 2. Интегральное исчисление	14
Раздел 3. Математический анализ многих переменных	25
Список литературы	37

## Введение

Система компьютерной алгебры Mathematica известна, как мощное вычислительное приложение. В течение более 25-ти лет *она* определяет передовой край технических вычислений – и является основной средой для проведения расчётов для миллионов инженеров, преподавателей, студентов и других пользователей во всём мире. Mathematica позволяет осуществлять широкий спектр символьных преобразований, в том числе и операции математического анализа: дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд и другие.

В учебно-методическом пособии описываются задачи математического анализа, такие как:

- 1) нахождение пределов и предельных множеств;
- 2) полные и частные производные различных порядков, в общем случае от функции нескольких переменных;
- 3) вычисление первообразных;
- 4) численное и символьное интегрирование, в том числе нахождение кратных интегралов и вычисление с их помощью площадей и объемов;
- 5) изучение сумм Римана;
- 6) Нахождение критических точек и локальных экстремумов для функции нескольких переменных.

Ряд простых задач можно решить, вызвав встроенную функцию языка Wolfram; более сложные задачи требуют написания небольших программ.

Система Mathematica имеет очень много возможностей, и рассмотреть их все достаточно не просто. Поэтому требуется выбирать наиболее простые и эффективные способы решения задач математического анализа.

Для того, чтобы читатель мог отличить код языка Wolfram от остального текста, перед вызовом функции языка Wolfram помещается символ  $\Rightarrow$ ; как правило, после вызова функции следует запись результата функции.

## Раздел 1. Дифференциальное исчисление

Предел функции является основным понятием дифференциального исчисления. Для сложной функции, вычисление предела может быть довольно сложным и может потребовать специализированные методы для его оценки. Mathematica имеет встроенные процедуры для выполнения этой задачи и стремится определить точное значение предела.

$\text{Limit}[f[x], x \rightarrow a]$  – вычисляет значение  $\lim f[x], x \rightarrow a$ .

1. Вычислить  $\text{Lim}[(2^x + x - 1)/(3x), x \rightarrow 0]$

Решение

$$\Rightarrow \text{Limit}[(2^x + x - 1)/(3x), x \rightarrow 0]$$

$$\frac{1}{3}(1 + \text{Log}[2])$$

2. Вычислить  $\text{Lim}[(\text{Tan}[x] - x)/(x^3), x \rightarrow 0]$

Решение

$$\Rightarrow \text{Limit}[(\text{Tan}[x] - x)/(x^3), x \rightarrow 0]$$

$$\frac{1}{3}$$

3. Вычислить  $\text{Lim}[(1 + \text{Sin}[x])^{\text{Cot}[2x]}, x \rightarrow 0]$

Решение

$$\Rightarrow \text{Limit}[(1 + \text{Sin}[x])^{\text{Cot}[2x]}, x \rightarrow 0]$$

$$\sqrt{e}$$

4. Вычислить  $\text{Lim}[(2 - x)^{\text{Tan}[(\pi/2)x]}, x \rightarrow 1]$

Решение

$$\Rightarrow \text{Limit}[(2 - x)^{\text{Tan}[(\pi/2)x]}, x \rightarrow 1]$$

$$e^{2/\pi}$$

5. Если  $p$  долларов увеличиваются  $n$  раз в год при годовой процентной ставке  $r$ , деньги будут стоить  $p \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$  долларов спустя  $t$  лет. Сколько будет стоить, если она усугубляется непрерывно ( $n \rightarrow \infty$ )?

Решение

$$\Rightarrow \text{Limit}[p(1 + r/n)^{nt}, n \rightarrow \infty]$$

$$e^{rt}p$$

Есть несколько способов вычисления производных в системе Mathematica. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, поэтому правильный выбор для конкретной ситуации должен быть определен.

Если  $f[x]$  представляет собой функцию, то  $f'[x]$  ее производная. А производные высших порядков определяются как  $f''[x]$ ,  $f'''[x]$  и так далее.

6. Подсчитать 3-ю производную от тангеса  $x$ .

Решение

$$\Rightarrow \text{Tan}'''[x]$$

$$2\text{Sec}[x]^4 + 4\text{Sec}[x]^2\text{Tan}[x]^2$$

$D[f[x], x]$  возвращает производную  $f$  по  $x$ .

$D[f[x], \{x, n\}]$  возвращает  $n$ -ую производную  $f$  по  $x$ .

$$7. \Rightarrow D[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x]$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$$

$$\Rightarrow D[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \{x, 2\}]$$

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3$$

$$\Rightarrow D[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \{x, 3\}]$$

$$6 + 24x + 60x^2$$

Функция  $f$  имеет абсолютный (глобальный) максимум  $[3, 5]$  на интервале  $I$ , в точке  $c$ , если  $f(x) \leq f(c)$  для всех  $x$ . Другими словами  $f(c)$  – наибольшее значение  $f(x)$ . Аналогичное определение (с неравенством в другую сторону) имеет абсолютный минимум. Одним из наиболее важных приложений дифференциального исчисления является оптимизация, то есть нахождение максимума и минимума значений функции, при соблюдении определенных ограничений.

Не все функции имеют абсолютные максимум и минимум. Теорема дает достаточное условие существования экстремума.

*Если  $f$  непрерывна на замкнутом ограниченном интервале  $I$ , то  $f$  имеет как абсолютный максимум, так и абсолютный минимум на интервале  $I$ .*

Критическое число для функции  $f$  – это число  $c$ , для которого  $f'(c) = 0$  или  $f'(c)$  не существует. Можно показать, что если функция непрерывна на замкнутом интервале, то абсолютный максимум или минимум можно найти или при  $x =$  критическому числу, или на конце промежутка. Мы можем использовать систему Mathematica для отыскания максимума и минимума.

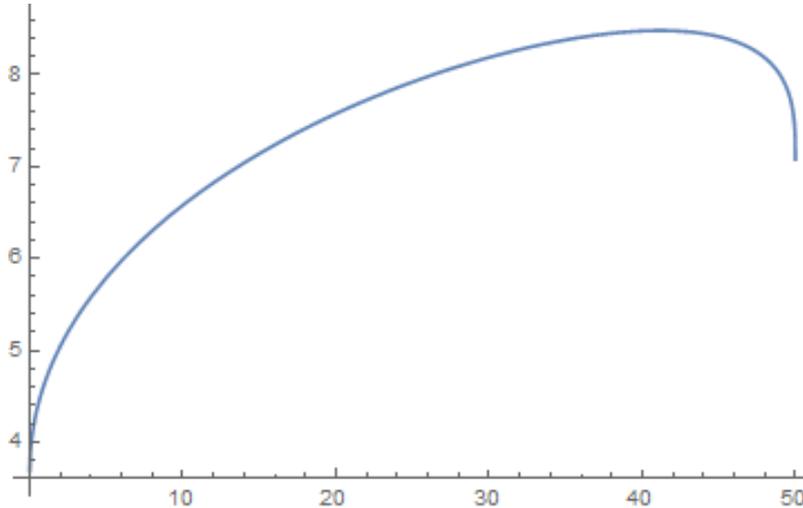
8. Найти два положительных числа, сумма которых равна 50, так чтобы сумма квадратного корня из первого числа и корня третьей степени из второго числа была наибольшей.

Решение

$$\Rightarrow y = 50 - x;$$

$$\Rightarrow f[x_]:= \sqrt{x} + \sqrt[3]{y};$$

$$\Rightarrow \text{Plot}[f[x], \{x, 0, 50\}]$$



$$\Rightarrow \text{NSolve}[f'[x] == 0]$$

$$\{\{x \rightarrow 41.1553\}\}$$

$$\Rightarrow y/.x \rightarrow 41.1553$$

$$8.8447$$

$$\Rightarrow f[41.1553]$$

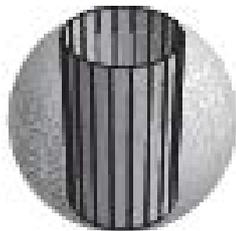
$$8.48329$$

Найденные числа –  $x = 41.1553$  и  $y = 8.8447$ . Максимальная сумма 8.48329.

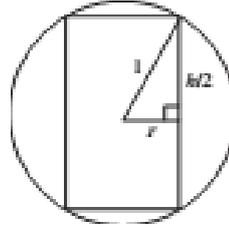
9. Правильный круговой цилиндр вписан в единичную сферу.

(a) Найдите наибольший возможный объем.

(b) Найти максимально возможную площадь поверхности.



Решение



(a) Рассмотрим двумерный случай.

Добавим радиус и высоту вписанного цилиндра  $r$  и  $h$ , соответственно.

Объем вписанного цилиндра  $V = \pi r^2 h$  и по теореме Пифагора  $r^2 + (\frac{h}{2})^2 =$

1. Видно, что  $r^2 = 1 - (\frac{h}{2})^2$ . Таким образом, объем зависит от  $h$ , поэтому

получается  $V(h) = \pi(1 - (\frac{h}{2})^2)^2 h$ .

$\Rightarrow v[h\_]: = \pi(1 - (h/2)^2)h;$

$\Rightarrow \text{Solve}[v'[h] == 0, h]$

$\{\{h \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}\}, \{h \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\}\}$

$\Rightarrow v_{\max} = v[\frac{2}{\sqrt{3}}]$

$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \text{Sign}[v''[\frac{2}{\sqrt{3}}]]$

-1

(b) Площадь поверхности цилиндра (в том числе и сверху и снизу) является

$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$ . Как и в случае (a)  $r^2 + (\frac{h}{2})^2 = 1$ , но, так как обе вели-

чины  $r$  и  $r^2$  появляются в  $S$ , легче выразить  $h$  через  $r$ .

$\Rightarrow \text{Solve}[r^2 + (h/2)^2 == 1, h]$

$\{\{h \rightarrow -2\sqrt{1 - r^2}\}, \{h \rightarrow 2\sqrt{1 - r^2}\}\}$

Теперь подставим (положительное) значение  $h$  в формулу для расчета  $S$ :

$\Rightarrow s[r\_]: = 2\pi r h + 2\pi r^2 /. h \rightarrow 2\sqrt{1 - r^2}$

$2\pi r^2 + 4\pi r\sqrt{1 - r^2}$

Находим критические значения  $r$ :

$\Rightarrow \text{Solve}[s'[r] == 0, r]$

$\{\{r \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})}\}, \{r \rightarrow \sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}\}\}$

Только положительное значение  $r$  является приемлемым. Мы используем его, чтобы вычислить максимальную площадь поверхности.

$\Rightarrow s[\sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}] // \text{Simplify}$

$(1 + \sqrt{5})\pi$

$$\Rightarrow \text{Sign}[s[\sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}]]$$

-1

10. Найти точки на окружности  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ , которые являются ближайшими и другие точки – наиболее удаленными от точки  $P = (4, 4)$ .

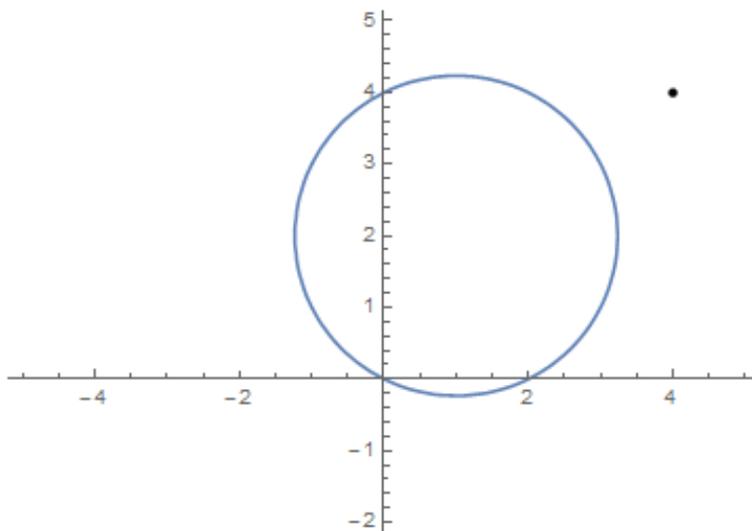
Решение

Сначала мы рисуем чертеж

$$\Rightarrow \text{circle} = \text{ContourPlot}[x^2 + y^2 - 2x - 4y == 0, \{x, -5, 5\}, \{y, -2, 5\}];$$

$$\Rightarrow \text{point} = \text{Graphics}[\{\text{PointSize}[\text{Medium}], \text{Point}[\{4, 4\}]\};$$

$$\Rightarrow \text{Show}[\text{circle}, \text{point}, \text{Frame} \rightarrow \text{False}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}, \text{Axes} \rightarrow \text{True}]$$



Пусть  $(x, y)$  представляет собой точку на окружности. Во-первых, нам нужно выразить  $y$  через  $x$ .

$$\Rightarrow \text{Solve}[x^2 + y^2 - 2x - 4y == 0, y] // \text{Simplify}$$

$$\{\{y \rightarrow 2 - \sqrt{4 + 2x - x^2}\}, \{y \rightarrow 2 + \sqrt{4 + 2x - x^2}\}\}$$

Мы должны минимизировать квадрат расстояния от  $(x, y)$  до  $P$ . Мы называем это  $d^2$ . Из рисунка ясно, что точка ближайшая к  $P$  лежит на поверхности окружности.

$$\Rightarrow y = 2 + \sqrt{4 + 2x - x^2};$$

$$\Rightarrow d^2[x_] = (x - 4)^2 + (y - 4)^2;$$

$$\Rightarrow \text{Solve}[d^2'[x] == 0]$$

$$\{\{x \rightarrow \frac{1}{13}(13 + 3\sqrt{65})\}\}$$

$$\Rightarrow \{x, y\} /. x \rightarrow \frac{1}{13}(13 + 3\sqrt{65}) // \text{Simplify}$$

$$\{1 + 3\sqrt{\frac{5}{13}}, 2 + 2\sqrt{\frac{5}{13}}\}$$

⇒ %//N

{2.86052, 3.24034}

Наиболее удаленная точка от  $P$  лежит на нижней полуокружности.

⇒  $y = 2 - \sqrt{4 + 2x - x^2}$ ;

⇒  $d2[x_] = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ ;

⇒  $\text{Solve}[d2'[x] == 0]$

{{ $x \rightarrow \frac{1}{13}(13 - 3\sqrt{65})$ }}

⇒  $\{x, y\} /. x \rightarrow \frac{1}{13}(13 - 3\sqrt{65}) // \text{Simplify}$

$\{1 - 3\sqrt{\frac{5}{13}}, 2 - 2\sqrt{\frac{5}{13}}\}$

⇒ %//N

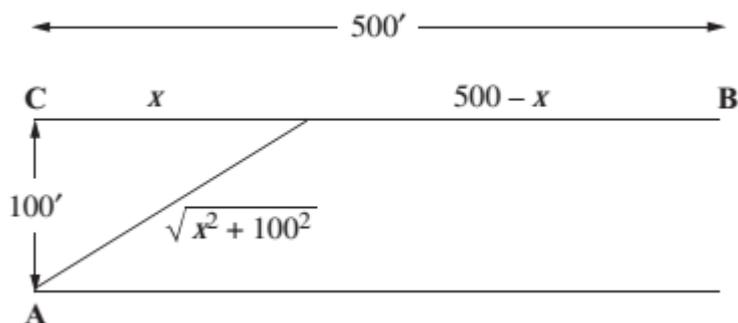
{-0.86052, 0.75965}

11.

Местная телефонная компания хочет проложить кабель от точки  $A$  на одной стороне реки 100 метров в ширину в точку  $B$  на противоположной стороне, которая на 100 метров удалена вдоль берега от точки  $C$ , противоположной  $A$ . Стоимость прокладки кабеля под водой в три раза больше, чем на суше. Как компания должна проложить кабель для того, чтобы минимизировать стоимость проекта?

Решение

$c(x) = 3a\sqrt{x^2 + 100^2} + a(500 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 500$ .



⇒  $c[x_] := 3a\sqrt{x^2 + 100^2} + a(500 - x)$ ;

⇒  $\text{Solve}[c'[x] == 0, x]$

{{ $x \rightarrow 25\sqrt{2}$ }}

Сравним стоимость полученного решения со стоимостью прокладки кабеля по прямой от  $A$  до  $B$ .

⇒  $c[0] // N$

$800. a$

$$\Rightarrow c[25\sqrt{2}]/N$$

$$782.84a$$

$$\Rightarrow c[500]/N$$

$$1529.71a$$

Для получения минимальных затрат следует проложить кабель до точки  $25\sqrt{2}$  под водой, потом до  $B$ .

Полиномы – удобные функции для работы. Они непрерывны и могут легко интегрироваться. Если встречается трудная функция, то её можно легко аппроксимировать многочленом.

Если известно значение функции и её производной в одной точке  $a$ , то функцию можно представить в виде ряда. Это, однако, бесконечный ряд, который должен быть усечен для практического применения. Обрезать нужно таким образом, чтобы ряд точно приближал данную функцию, хотя бы в некоторой окрестности точки  $a$ .

Следующая функция известна как ряд Тейлора, дает представление аналитической функции  $f(x)$ . Если  $a=0$ , то ряд называется рядом Маклорена.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

$f^{(k)}(a)$  представляет собой  $k$ -ую производную от  $f$  в точке  $a$ . Если  $k=0$ , то это означает  $f(a)$ .

Если мы усечем этот бесконечный ряд, исключив все члены степени выше  $n$ , мы получим многочлен Тейлора  $f$  от  $a$ . Представим этот многочлен как  $p_n(x)$ . Если  $a=0$ , то ряд Маклорена.

Mathematica включает в себя удобную команду для построения полинома Тейлора.

- `Series[f(x), {x, a, n}]` генерирует полином Тейлора  $n$ -ой степени  $f(x)$  в  $a$ .

12. Получить многочлен Маклорена 10-ой степени от функции  $f(x) = \tan^{-1} x$  используя прямое суммирование и затем команду `Series`.

Решение

$$\Rightarrow f[x_]:= \text{ArcTan}[x];$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{10} \frac{\text{Derivative}[k][f][0]}{k!} x^k$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$$

$$\Rightarrow \text{Series}[f[x], \{x, 0, 10\}]$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + O[x]^{11}$$

13. Получить представление  $x^5$  по степеням  $x - 2$ .

Решение

$$\Rightarrow \text{Series}[x^5, \{x, 2, 5\}] // \text{Normal}$$

$$32 + 80(-2 + x) + 80(-2 + x)^2 + 40(-2 + x)^3 + 10(-2 + x)^4 + (-2 + x)^5$$

$$\Rightarrow \% // \text{TraditionalForm}$$

$$(x - 2)^5 + 10(x - 2)^4 + 40(x - 2)^3 + 80(x - 2)^2 + 80(x - 2) + 32$$

14. Получить раз Тейлора пятой степени в точке  $a = 1$  для функции  $\sqrt{x}$  и использовать его для аппроксимации  $\sqrt{3/2}$ .

Решение

$$\Rightarrow p[x_] = \text{Series}[\sqrt{x}, \{x, 1, 5\}] // \text{Normal}$$

$$1 + \frac{1}{2}(-1 + x) - \frac{1}{8}(-1 + x)^2 + \frac{1}{16}(-1 + x)^3 - \frac{5}{128}(-1 + x)^4 + \frac{7}{256}(-1 + x)^5$$

$$\Rightarrow \text{approx} = p[3/2] // N$$

$$1.2249755859375$$

$$\Rightarrow \text{exact} = \sqrt{3/2} // N$$

$$1.224744871391589$$

$$\Rightarrow \text{Abs}[\% - \% \%]$$

$$0.00023071$$

это абсолютная погрешность приближения.

15. Пусть  $f(x) = \sin x$  и построен многочлен Макларена 11-ой степени. Построить функцию ошибки и вычислить ее значения от  $x=0$  до  $x=1$  с шагом 0.1. Результаты поместить в таблицу.

Решение

$$\Rightarrow f[x_] := \text{Sin}[x];$$

$$\Rightarrow p11[x_] = \text{Normal}[\text{Series}[f[x], \{x, 0, 11\}]];$$

$$\Rightarrow \text{error}[x_] = \text{Abs}[f[x] - p11[x]];$$

$$\Rightarrow \text{errorvalues} = \text{Table}[\{x, \text{error}[x]\}, \{x, 0, 6, 1.\}];$$

$$\Rightarrow \text{TableForm}[\text{errorvalues}, \text{TableSpacing} \rightarrow \{1, 5\}, \text{TableHeadings} \rightarrow \{\text{None}, \{ "x", "error[x]" \} \}]$$

"x"	"error[x]"
0.	0.
1.	$1.598284837811547 \times 10^{-10}$
2.	0.000001290862878922105
3.	0.00024541390402316177
4.	0.01000205816329136
5.	0.17469302431874123
6.	1.7808442420608195

Чем дальше  $x$  от 0 тем больше погрешность.

16. Пусть  $f(x) = \sin x$ , построить многочлен Макларена 1, 3, 5, 7 и 9 степени и вычислить значение в  $x = 1$ . Определить ошибку в приближении и записать в таблицу.

Решение

```

=> f[x_] := Sin[x];
=> exactvalue = f[1];
=> value[n_] := Normal[Series[f[x], {x, 0, n}]] /. x -> 1
=> data = Table[{n, N[value[n]], N[exactvalue], N[Abs[value[n] -
exactvalue]]}, {n, 1, 9, 2}];
=> TableForm[data, TableSpacing -> {1, 5}, TableHeadings ->
{None, {"n", "p(1)", "f(1)", "Error"}}]

```

n	p(1)	f(1)	Error
1	1.	0.841471	0.158529
3	0.833333	0.841471	0.00813765
5	0.841667	0.841471	0.000195682
7	0.841468	0.841471	$2.73084 \times 10^{-6}$
9	0.841471	0.841471	$2.48923 \times 10^{-8}$

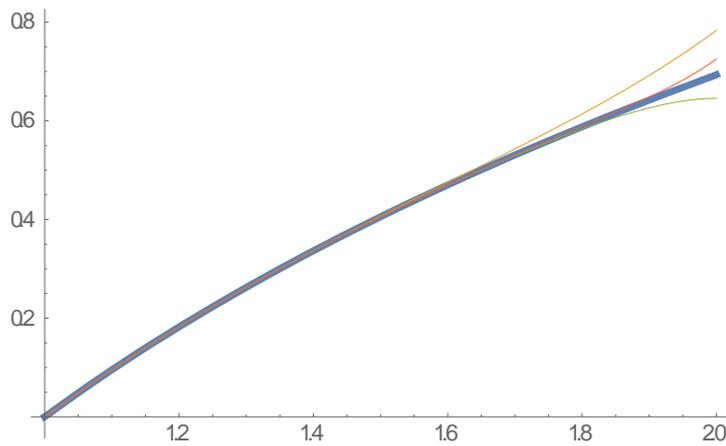
17. Пусть  $f(x) = \ln x$  и вычислить ряд Тейлора в  $a = 1$  степени 5, 10 и 15. Затем изобразить все три полинома в одной системе координат,  $1 \leq x \leq 2$ .

Решение

```

=> f[x_] := Log[x];
=> p5[x_] = Series[f[x], {x, 1, 5}]/Normal;
=> p10[x_] = Series[f[x], {x, 1, 10}]/Normal;
=> p15[x_] = Series[f[x], {x, 1, 15}]/Normal;
=> Plot[{f[x], p5[x], p10[x], p15[x]}, {x, 1, 2}, PlotStyle ->
{Thickness[.01], Thickness[.001], Thickness[.001], Thickness[.001]}]

```



18. Пусть  $f(x) = \ln x$  и построен многочлен Тейлора 5-ой степени в  $a = 1$ . Построить функцию ошибки и вычислить ее значения от  $x=1$  до  $x=2$  с шагом 0.1. Результаты поместить в таблицу.

Решение

$\Rightarrow f[x_] := \text{Log}[x];$

$\Rightarrow p5[x_] = \text{Normal}[\text{Series}[f[x], \{x, 1, 5\}]];$

$\Rightarrow \text{error}[x_] = \text{Abs}[f[x] - p5[x]];$

$\Rightarrow \text{errorvalues} = \text{Table}[\{x, \text{error}[x]\}, \{x, 1, 2, .1\}];$

$\Rightarrow \text{TableForm}[\text{errorvalues}, \text{TableSpacing} \rightarrow \{1, 5\}, \text{TableHeadings} \rightarrow \{\text{None}, \{"x", "error[x]"\}\}]$

"x"	"error[x]"
1.	0.
1.1	$1.53529008395381 \times 10^{-7}$
1.2	0.000009109872711965395
1.3	0.0000967355325089958
1.4	0.0005090967121201828
1.5	0.0018265585585024446
1.6	0.005148370754264331
1.7	0.01229408227116302
1.8	0.026016001764547658
1.9	0.05021911382760513
2.	0.09018615277338804

## Раздел 2. Интегральное исчисление

Первообразная функция  $F$  от функции  $f$  есть  $F'(x) = f(x)$ . В Mathematica функция `Integrate` вычисляет первообразную. Вы заметите, что постоянная интегрирования  $C$  опущена из ответа.

- `Integrate [f[x], x]` вычисляет первообразную функции.

Mathematica может вычислять первообразные элементарных функций, найденные в таблицах. Если Mathematica не может выразить первообразную в элементарных функция, то пытается выразить через специальные функции, в крайнем случае, возвращает интеграл в невычисленном виде.

1. Вычислить  $\int \sqrt{x} dx$ .

Решение

$$\Rightarrow \int \sqrt{x} dx$$

$$\frac{2x^{3/2}}{3}$$

2. Вычислить  $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du$ .

Решение

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du$$

$$\text{Log}[u + \sqrt{-a^2 + u^2}]$$

3. Вычислить  $\int \tanh x dx$ .

Решение

$$\Rightarrow \int \text{Tanh}[x] dx$$

$$\text{Log}[\text{Cosh}[x]]$$

4. Построить таблицу интегралов  $\int \sin^n x dx$   $n=1, 2, 3, \dots, 10$ .

Решение

$$\Rightarrow \text{anti}[n\_]: = \int \text{Sin}[x]^n dx$$

$$\Rightarrow \text{tablevalues} = \text{Table}[\{n, \text{Together}[\text{anti}[n]]\}, \{n, 1, 10\}];$$

$$\Rightarrow \text{TableForm}[\text{tablevalues}, \text{TableSpacing} \rightarrow \{1, 5\}, \text{TableHeadings} \rightarrow \{\text{None}, \{n, \int \text{Sin}^n x dx\}\}]$$

"n"	"∫ Sin^n x dx"
1	-Cos[x]
2	$\frac{1}{4}(2x - \text{Sin}[2x])$
3	$\frac{1}{12}(-9\text{Cos}[x] + \text{Cos}[3x])$
4	$\frac{1}{32}(12x - 8\text{Sin}[2x] + \text{Sin}[4x])$
5	$\frac{1}{240}(-150\text{Cos}[x] + 25\text{Cos}[3x] - 3\text{Cos}[5x])$
6	$\frac{1}{192}(60x - 45\text{Sin}[2x] + 9\text{Sin}[4x] - \text{Sin}[6x])$
7	$\frac{-1225\text{Cos}[x] + 245\text{Cos}[3x] - 49\text{Cos}[5x] + 5\text{Cos}[7x]}{2240}$
8	$\frac{840x - 672\text{Sin}[2x] + 168\text{Sin}[4x] - 32\text{Sin}[6x] + 3\text{Sin}[8x]}{3072}$
9	$\frac{-39690\text{Cos}[x] + 8820\text{Cos}[3x] - 2268\text{Cos}[5x] + 405\text{Cos}[7x] - 35\text{Cos}[9x]}{80640}$
10	$\frac{2520x - 2100\text{Sin}[2x] + 600\text{Sin}[4x] - 150\text{Sin}[6x] + 25\text{Sin}[8x] - 2\text{Sin}[10x]}{10240}$

Определенный интеграл может быть вычислен одним из двух способов, а именно: точно, используя основную теорему исчисления или приближенно, с помощью численных методов. В Mathematica можно вычислять и тем и другим способами.

- `Integrate[f[x], {x, a, b}]` вычисляет точное значение интеграла.
- `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]` вычисляет приближенное значение интеграла.

`NIntegrate` оценивает адаптивный алгоритм, который разбивает интервал интегрирования до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность. Интервал разбивается, пока величины опций `AccuracyGoal` или `PrecisionGoal` не будут достигнуты.

`AccuracyGoal` – есть опция, которая говорит, сколько цифр стоит оставить в окончательном результате. С помощью `AccuracyGoal` мы управляем абсолютной ошибкой, по умолчанию для `NIntegrate` опция `AccuracyGoal` – бесконечность. Что говорит о том, что точность не следует использовать, как критерий для прекращения.

WorkingPrecision – есть опция, которая указывает, как много точных цифр следует использовать в вычислениях. По умолчанию их 16.

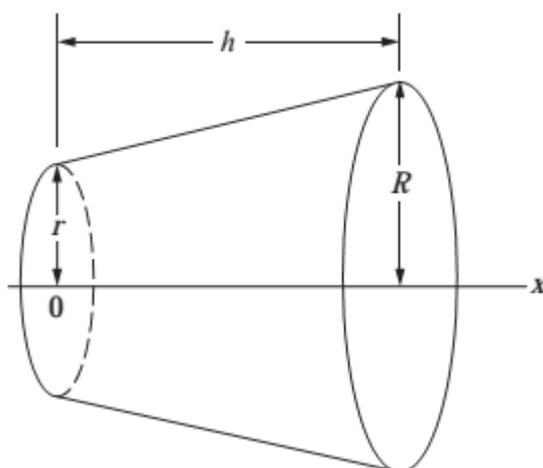
PrecisionGoal – опция, которая задает относительную ошибку. По умолчанию значение PrecisionGoal → Automatic, которое устанавливает относительную ошибку как половину WorkingPrecision.

Последовательность N[Integrate[f[x],{x, a, b}]] вычисляет интеграл, когда это возможно: сначала находит первообразную, а затем использует правило Ньютона-Лейбница. Если это не возможно, то N[Integrate[f[x],{x, a, b}]] вычисляется автоматически.

5. Вычислить объем усеченного конуса с высотой  $h$  и радиусами  $r$  и  $R$ , и использовать эту формулу для нахождения объема конуса радиусом  $R$  и высотой  $H$ .

Решение

Положение конуса показано на рисунке.



$$\Rightarrow y: = \frac{R-r}{h} x + r$$

$$\Rightarrow \pi \int_0^h y^2 dx$$

$$\frac{1}{3} h \pi (r^2 + rR + R^2)$$

$$\Rightarrow \%/.r \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{3} h \pi R^2$$

6. В теореме о среднем говорится, что если функция  $f$  непрерывна на замкнутом ограниченном интервале  $[a, b]$ , то существует число  $c$  между  $a$  и  $b$ , что  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ . Найти значение  $c$ , которое удовлетворяет теореме о среднем для  $f(x) = \ln x$  на интервале  $[1, 2]$ .

Решение

$\Rightarrow f[x_] := \text{Log}[x];$

$\Rightarrow a := 1; b := 2;$

$\Rightarrow \text{Solve}[\int_a^b f[x] dx == f[c](b - a), c] // \text{Simplify}$

$\{\{c \rightarrow \frac{4}{e}\}\}$

$\Rightarrow \% // N$

$\{\{c \rightarrow 1.47152\}\}$

Для того, что бы получить визуализацию значения теоремы о среднем на интервале рассмотрим следующие участки. Заметим, что площадь под кривой, выше оси  $x$ , равна площади, охватываемой прямоугольником, определенным числом  $c$ .

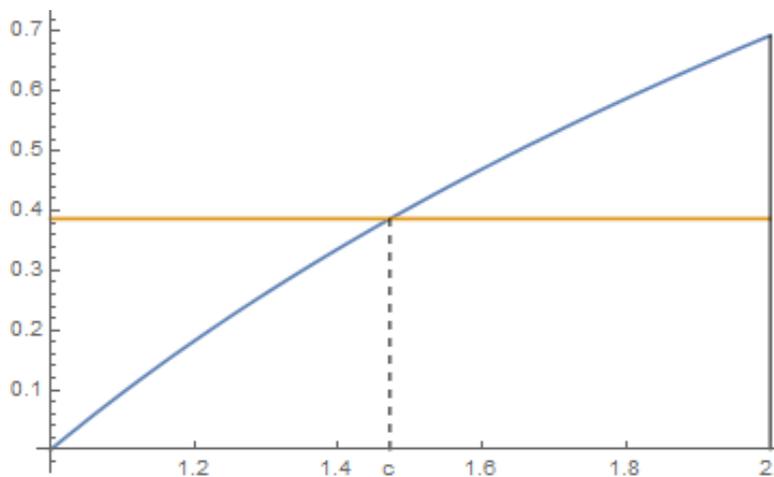
$\Rightarrow c := 1.47152$

$\Rightarrow g1 := \text{Plot}\{\{f[x], f[c]\}, \{x, a, b\}, \text{Ticks} \rightarrow$   
 $\{\{1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.\}, \{c, "c"\}\}, \text{Automatic}\}$

$\Rightarrow g2 := \text{Graphics}[\text{Line}[\{\{2, 0\}, \{2, f[2]\}\}]];$

$\Rightarrow g3 := \text{Graphics}[\{\text{Dashed}, \text{Line}[\{\{c, 0\}, \{c, f[c]\}\}]\};$

$\Rightarrow \text{Show}[g1, g2, g3]$



Площадь под кривой, выше оси  $x$ , равна площади, охватываемой прямоугольником.

7. Работа, проделанная в перемещении объекта от  $a$  до  $b$  переменной силы  $f(x)$ , является  $\int_a^b f(x) dx$ . В соответствии закону Гука, сила, необходимая для растяжения пружины, пропорциональна смещению расстояния. Если естественная длина пружины равна 10 см, а сила необходимая для удержания пружины на в положение на 5 см длиннее равна 40 ньютонов, то какая работа потребуется, чтобы удержать пружину в растяжении от 10 до 15 см?

Решение

Закон Гука гласит,  $f(x) = kx$ , где  $x$  представляет собой расстояние за пределы естественной длины пружины. Поскольку сила 40 ньютонов нужна для удержания 5 см (0.05 м) за пределами своей длины, то  $40=0.05k$ .

$$\Rightarrow k = 40/0.05;$$

$$\Rightarrow f[x_]:= kx;$$

$$\Rightarrow \text{work} = \int_0^{0.05} f[x] dx$$

1.

Работа равна 1 Джоуль

Если  $f$  – непрерывная функция на  $[a, b]$ , то мы можем определить новую функцию:  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Интуитивно, если  $f(t) \geq 0$ , то  $F(x)$  представляет собой область, ограниченную  $f(t)$

8. Изобразить на одном наборе осей графики трех первообразных  $f(x) = e^{\sin x}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  для которых  $F(0)=0$ ,  $F(1)=0$ , и  $F(2)=0$ .

Решение

Из-за сложного характера функции  $f(x)$  лучше использовать NIntegrate.

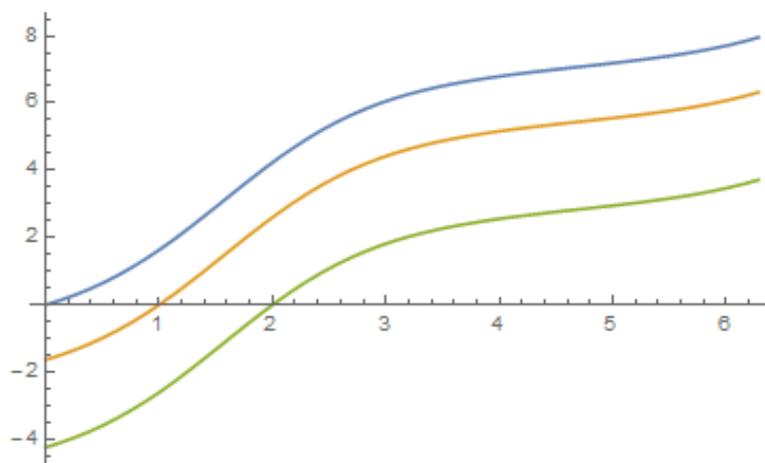
$$\Rightarrow f[x_] = \text{Exp}[\text{Sin}[x]];$$

$$\Rightarrow F1[x_] := \text{NIntegrate}[f[t], \{t, 0, x\}]$$

$$\Rightarrow F2[x_] := \text{NIntegrate}[f[t], \{t, 1, x\}]$$

$$\Rightarrow F3[x_] := \text{NIntegrate}[f[t], \{t, 2, x\}]$$

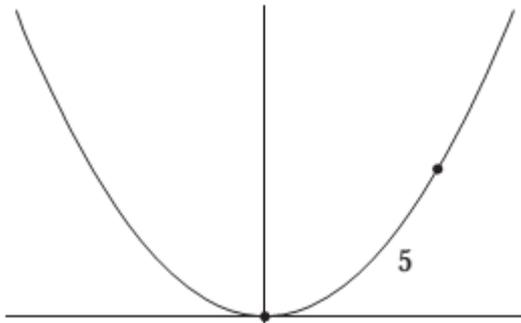
$$\Rightarrow \text{Plot}\{\{F1[x], F2[x], F3[x]\}, \{x, 0, 2\pi\}$$



9. Найти точку на параболе  $y = x^2$ , для которой длина отрезка параболы от начала координат до этой точки равна 5.

Решение

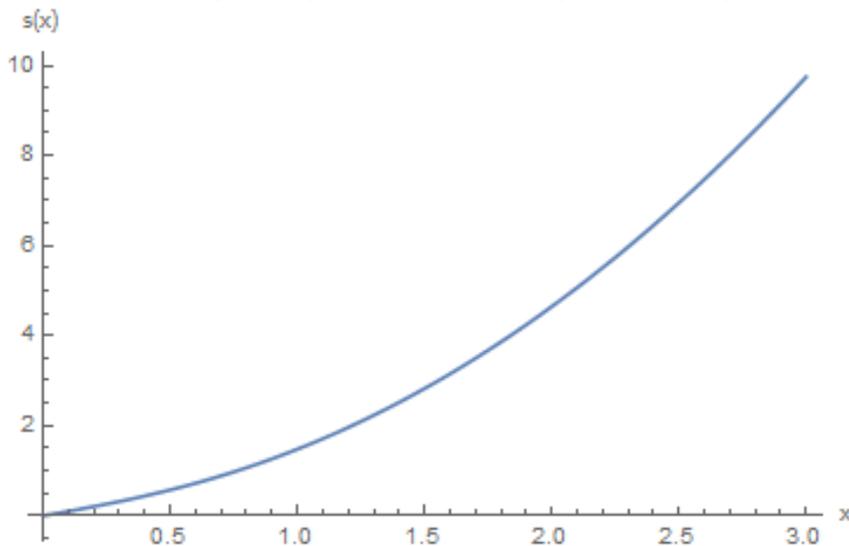
Длина дуги функции  $f(x)$ , от  $x = a$  до  $x = b$  есть  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ .  
Очевидно, что существует две точки. Мы будем искать точку в правом квадрате.



$$\Rightarrow f[x_] := x^2;$$

$$\Rightarrow s[x_] = \int_0^x \sqrt{1 + f'[t]^2} dt;$$

$$\Rightarrow \text{Plot}[s[x], \{x, 0, 3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "s(x)" \}]$$



$$\Rightarrow \text{solution} = \text{FindRoot}[s[x] = 5, \{x, 2\}]$$

$$\{x \rightarrow 2.08401\}$$

$$\Rightarrow x = x /. \text{solution};$$

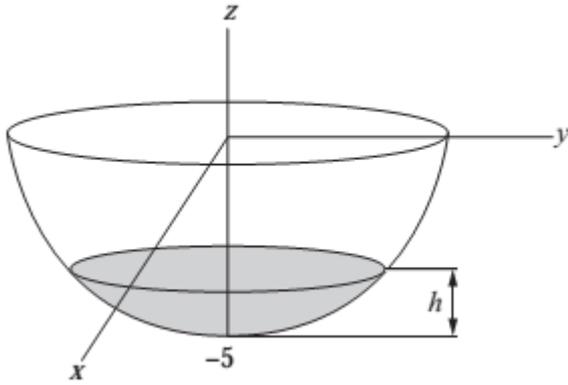
$$\Rightarrow \{x, f[x]\}$$

$$\{2.08401, 4.34308\}$$

10. Чаша представляет собой полусферу радиуса 5. Определить высоту 100 кубических сантиметров жидкости.

Решение

Уравнение полусферы в трех-мерном пространстве имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \leq 0$ . Её пересечение с плоскостью является окружность  $x^2 + y^2 = 25 - z_0^2$ , радиус которой  $r = \sqrt{25 - z_0^2}$  и площадь которой  $\pi r^2 = \pi(25 - z_0^2)$ . Интегрирую по  $r$  получим объем затемнённой области  $V(x) = \pi \int_{-5}^{-5+h} (25 - z^2) dz$  ( $z_0$  заменено на  $z$  для удобства).



$$\Rightarrow v[h] = \pi \int_{-5}^{-5+h} (25 - z^2) dz$$

$$\left(5h^2 - \frac{h^3}{3}\right) \pi$$

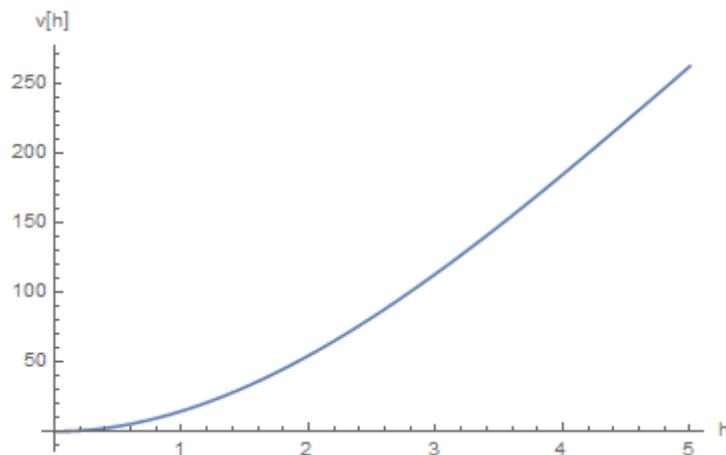
В качестве проверки  $v[5]$  должен содержать объем полусферы. Объем полушария  $\frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi (5)^3 = \frac{250\pi}{3}$ .

$$\Rightarrow v[5]$$

$$\frac{250\pi}{3}$$

Изобразим зависимость  $v$  от  $h$ .

$$\Rightarrow \text{Plot}[v[h], \{h, 0, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "h", "v[h]" \}]$$



Так как  $v[h]$  полином, то мы можем использовать NSolve для определения приближенного решения.

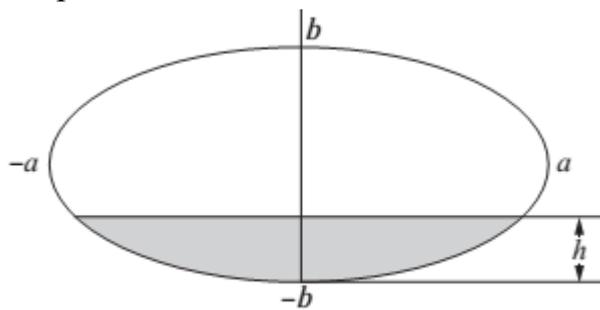
$$\text{NSolve}[v[h] == 100]$$

$$\{\{h \rightarrow -2.34629\}, \{h \rightarrow 2.79744\}, \{h \rightarrow 14.5488\}\}$$

Очевидно, что единственным решением является  $h \rightarrow 2.79744$ .

11. Подземный топливный бак имеет форму эллиптического цилиндра. Бак имеет длину  $l=20$  метров, большая полуось  $a=10$  метров, а малая полуось  $b=5$  метров. Для измерения количества топлива в баке, вставляется вертикальная палка, через центр цилиндра, до тех пор, пока палка не заденет нижнюю часть бака и измеряется уровень топлива на палке. Как далеко

должна быть отметка на палке, что бы узнать что осталось 500 кубических метров топлива?



Cross-section of fuel tank.

Решение

Уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Сначала определяем  $x$  как функции от  $y$ .

$$\Rightarrow \text{Solve}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1, x\right]$$

$$\left\{\left\{x \rightarrow -\frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b}\right\}\right\}$$

Далее мы получим интеграл, представляющий площадь поперечного сечения резервуара. Мы принимаем положительное решение и удваиваем область, пользуясь симметрией.

$$\Rightarrow a = 10; b = 5;$$

$$\Rightarrow x[y\_]: = \frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b};$$

$$\Rightarrow \text{area}[h\_]: = 2 \int_{-b}^{-b+h} x[y] dy;$$

В качестве проверки можно вычислить  $\text{area}[0]$ ,  $\text{area}[b]$  и  $\text{area}[2b]$ . Площадь, заключенная эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  является  $\pi ab$ .

$$\Rightarrow \text{area}[0]$$

$$0$$

$$\Rightarrow \text{area}[b]$$

$$25\pi$$

$$\text{area}[2b]$$

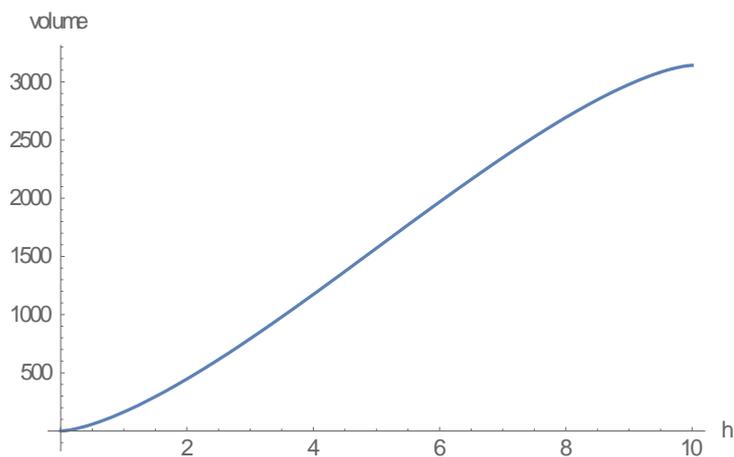
$$\Rightarrow 50\pi$$

Так как бак имеет сплошное поперечное сечение, его объем=длина×площадь поперечного сечения.

$$\Rightarrow \text{length} = 20;$$

$$\Rightarrow \text{volume}[h\_]: = \text{length} * \text{area}[h];$$

$$\Rightarrow \text{Plot}[\text{volume}[h], \{h, 0, 2b\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "h", "volume" \}]$$



$\Rightarrow \text{FindRoot}[\text{volume}[h] = 500, \{h, 2\}]$   
 $\{h \rightarrow 2.1623\}$

Интервал  $I = [a, b]$ , представляет собой набор подынтервалов,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

где  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . Если мы возьмем  $x_i^*$  - любую точку из интервала и  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  и сумма Римана  $f$  на интервале  $I$ , относительно данного разбиения, есть  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ .

Если  $f(x) \geq 0$  для  $a \leq x \leq b$ , то сумма Римана представляет собой приближенное значение площади под графиком  $f(x)$ , выше оси  $x$ , от  $x = a$  до  $x = b$ . На диаграмме показана сумма Римана функции  $f(x) = x^2$  на интервале  $[1, 2]$ , как площадь, заключенная четырьмя аппроксимирующими прямоугольниками одинаковой ширины.

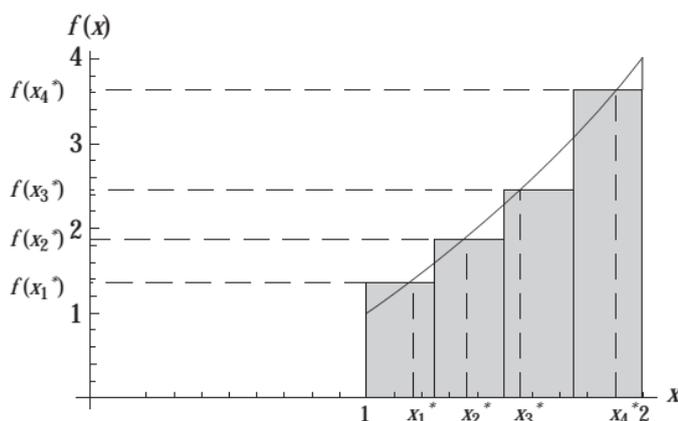


Рисунок 3

Сумма Римана, представленная серой областью, охваченная прямоугольником, предлагает лишь приближение к площади под кривой. Тем не

менее, поскольку ширина каждого прямоугольника уменьшается, площадь под кривой получается приближением к пределу.

Определенный интеграл  $f(x)$  на  $[a, b]$  определяется во многих учебниках интегрального исчисления, как

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i, \text{ где } \|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Условие  $\|P\| \rightarrow 0$  гарантирует, что длины всех подынтервалов по отношению к 0, как мы понимаем, все имеют одинаковую длину, это условие эквивалентно  $k \rightarrow 0$ . Для удобства мы будем рассматривать только подынтервалы одинаковой длины.

12. Приблизительно вычислить  $\int_1^2 x \ln x dx$  с помощью метода трапеций с  $n=100$  и сравнить результат с Mathematica.

Решение

$$\Rightarrow f[x\_]: = x \text{Log}[x];$$

$$\Rightarrow a: = 1; b: = 2;$$

$$\Rightarrow n: = 100;$$

$$\Rightarrow \text{dex}: = (b - a)/n;$$

$$\Rightarrow x[i\_]: = a + i \text{dex};$$

$$\Rightarrow \text{approximation} = \frac{\text{dex}}{2} (f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[x[i]] + f[b]) // N$$

$$0.6363$$

$$\Rightarrow \int_a^b f[x] dx // N$$

$$0.636294$$

Погрешность 0.000006 составляет менее 0,001%.

13. Рассчитайте приближение для  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  с помощью правила трапеции с 10, 50 и 100 подынтервалов. Сравнить с Mathematica.

Решение

$$\Rightarrow f[x\_]: = \text{Exp}[x^2];$$

$$\Rightarrow a: = 0; b: = 1;$$

$$\Rightarrow \int_a^b f[x] dx // N$$

$$1.46265$$

← приближение системы Mathematica

$$\Rightarrow \text{delx}: = (b - a)/n;$$

$$\Rightarrow x[i\_]: = a + i * \text{delx};$$

$\Rightarrow n: = 10$

$$\Rightarrow \text{approximation} = \frac{\text{delx}}{2} (f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[x[i]] + f[b]) // N$$

1.46717                      ←              ошибка = 0.00452

$\Rightarrow n: = 50$

$$\Rightarrow \text{approximation} = \frac{\text{delx}}{2} (f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[x[i]] + f[b]) // N$$

1.46283                      ←              ошибка = 0.00018

$\Rightarrow n: = 100$

$$\Rightarrow \text{approximation} = \frac{\text{delx}}{2} (f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[x[i]] + f[b]) // N$$

1.4627                      ←              ошибка = 0.00005

### Раздел 3. Математический анализ многих переменных

Команды  $D$ ,  $\partial$  и  $Derivative$ , описанные выше, на самом деле являются командами для вычисления частных производных. Конечно, если есть только одна переменная в функции, то частная производная становится обычной. Если присутствует две и более переменные, то все они, за исключением одной выделенной переменной, рассматриваются как константы.

В следующем описании  $f$  означает функцию нескольких переменных.

- $D[f,x]$  или  $\partial_x f$  возвращает частную производную от  $f$  по  $x$ .
- $D[f,(x,n)]$  или  $\partial_{\{x,n\}} f$  возвращает частную производную  $n$ -ого порядка от  $f$  по  $x$ .
- $D[f,\{x_1, n_1\},\{x_2, n_2\},\dots,\{x_k, n_k\}]$  или  $\partial_{\{x_1,n_1\},\{x_2,n_2\},\dots,\{x_k,n_k\}} f$  возвращает частные производные где  $n_1+n_2+\dots+n_k = n$ .

1. Вычислить частные производные первого и второго порядка

$$f(x,y) = xe^{xy}.$$

Решение

$$\Rightarrow f[x_,y_] := x \text{Exp}[xy];$$

$$\Rightarrow D[f[x,y],x]$$

$$e^{xy} + e^{xy}xy$$

$$\Rightarrow D[f[x,y],y]$$

$$e^{xy}x^2$$

$$\Rightarrow D[f[x,y],\{x,2\}]$$

$$2e^{xy}y + e^{xy}xy^2$$

$$\Rightarrow D[f[x,y],\{y,2\}]$$

$$e^{xy}x^3$$

$$\Rightarrow D[f[x,y],x,y]$$

$$2e^{xy}x + e^{xy}x^2y$$

2. Частные производные для  $f(x,y)$  определяются пределами:

$$f_x(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h,y) - f(x,y)) / h$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x,y+h) - f(x,y)) / h$$

Вычислить производные  $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$  с использованием определения и с помощью команды  $D$  системы Mathematica.

Решение

$$\Rightarrow f[x_,y_] := \text{Log}[x^2 + y^3];$$

$$\Rightarrow \text{Limit}\left[\frac{f[x+h,y]-f[x,y]}{h}, h \rightarrow 0\right]$$

$$\frac{2x}{x^2+y^3}$$

$$\Rightarrow D[f[x, y], x]$$

$$\frac{2x}{x^2+y^3}$$

$$\Rightarrow \text{Limit}\left[\frac{f[x,y+h]-f[x,y]}{h}, h \rightarrow 0\right]$$

$$\frac{3y^2}{x^2+y^3}$$

$$\Rightarrow D[f[x, y], y]$$

$$\frac{3y^2}{x^2+y^3}$$

3. Пусть  $z = e^{xy}$ . Вычислить  $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}$ .

Решение

$$\Rightarrow z := \text{Exp}[xy];$$

$$\Rightarrow D[z, \{x, 2\}, y]$$

$$2e^{xy}y + e^{xy}xy^2$$

4. Убедиться, что  $u = e^{-a^2 k^2 t} \sin kx$  является решением уравнения теплопроводности:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2 \partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Решение

$$\Rightarrow u[x, t] := \text{Exp}[-a^2 k^2 t] \text{Sin}[kx];$$

$$\Rightarrow \text{lhs} = D[u[x, t], t]$$

$$-a^2 e^{-a^2 k^2 t} k^2 \text{Sin}[kx]$$

$$\Rightarrow \text{rhs} = a^2 D[u[x, t], \{x, 2\}]$$

$$-a^2 e^{-a^2 k^2 t} k^2 \text{Sin}[kx]$$

$$\Rightarrow \text{lhs} == \text{rhs}$$

True

5. Касательная плоскость к поверхности  $f(x, y, z)=0$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Изобразите сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  и её касательную плоскость в точке  $(1, 2, 3)$ .

Решение

Сфера с центром в начале координат имеет радиус  $\sqrt{14}$ . Её уравнение переписывается в виде  $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ .

$$\Rightarrow f[x, y, z] := x^2 + y^2 + z^2 - 14;$$

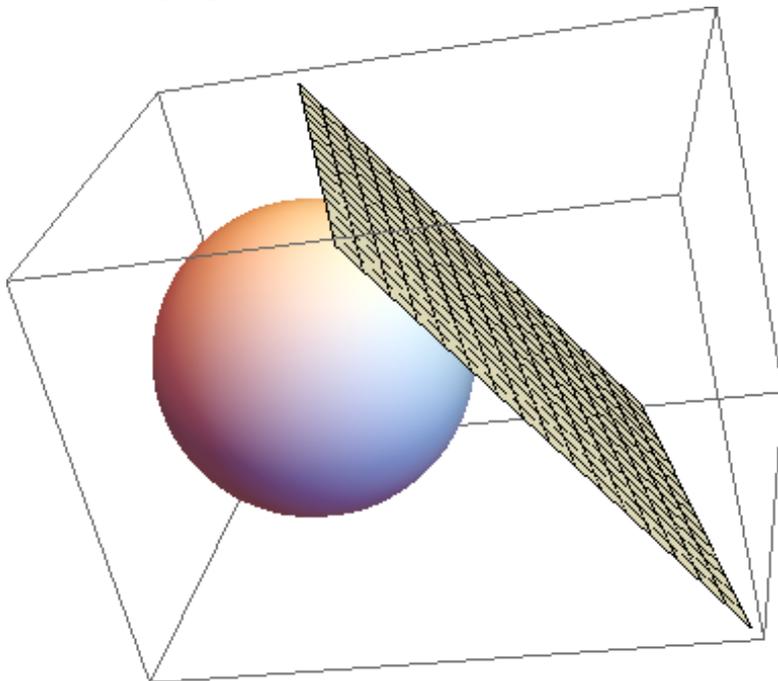
$$\Rightarrow g1 := \text{Graphics3D}[\text{Sphere}[\{0,0,0\}, \sqrt{14}]];$$

$$\Rightarrow a = \text{Derivative}[1,0,0][f][1,2,3];$$

```

⇒ b = Derivative[0,1,0][f][1,2,3];
⇒ c = Derivative[0,0,1][f][1,2,3];
⇒ Solve[a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 3) == 0, z]
{{z → - $\frac{-14\sqrt{14}+\sqrt{14}x+2\sqrt{14}y}{3\sqrt{14}}$ }}
⇒ g2:= Plot3D[ $\frac{1}{3}(14 - x - 2y)$ , {x, -5,5}, {y, -5,5}];
⇒ Show[g1, g2]

```



Функция  $f$  имеет относительный (или локальный) максимум в точке  $(x_0, y_0)$ , если существует открытый круг в точке  $(x_0, y_0)$ , такой что  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ , для всех  $(x, y)$  в этом круге. Аналогичное определение, только с неравенством в другую сторону имеет относительный (или локальный) минимум. Если  $f$  имеет локальный максимум или локальный минимум в точке  $(x_0, y_0)$ , то мы говорим, что  $f$  имеет относительный экстремум в точке  $(x_0, y_0)$ .

Если  $f$  дифференцируема, то необходимым условием для  $f(x, y)$ , чтобы в точке  $(x_0, y_0)$  имелся относительный экстремум является  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ . Тогда точка  $(x_0, y_0)$  является критической точкой для  $f$ .

Не все критические точки оказываются относительным экстремумом. Чтобы определить есть ли экстремум в критической точке, и если да, является ли это максимумом или минимумом, используем вторые частные производные.

Пусть  $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$  и пусть  $(x_0,y_0)$  будет критической точкой  $f$ .

- 1) Если  $D(x_0,y_0) > 0$  и  $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ , тогда  $f$  имеет относительный минимум в точке  $(x_0,y_0)$ ;
- 2) Если  $D(x_0,y_0) > 0$  и  $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ , тогда  $f$  имеет относительный максимум в точке  $(x_0,y_0)$ ;
- 3) Если  $D(x_0,y_0) < 0$ , тогда  $f$  не имеет ни относительного максимума, ни относительного минимума в точке  $(x_0,y_0)$ . Тогда говорят, что  $f$  имеет седловую точку  $(x_0,y_0)$ .

Если  $D(x_0,y_0) = 0$ , тогда ничего сказать нельзя.

6. Найти все относительные экстремумы функции  $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ .

Решение

$$\Rightarrow f[x_, y_] := xy \text{Exp}[-x^2 - y^2]$$

$$\Rightarrow \text{pdx} = \partial_x f[x, y] // \text{Factor}$$

$$-e^{-x^2-y^2}(-1 + 2x^2)y$$

$$\Rightarrow \text{pdy} = \partial_y f[x, y] // \text{Factor}$$

$$-e^{-x^2-y^2}x(-1 + 2y^2)$$

Если мы будем использовать Solve, чтобы найти, где частные производные равны 0, мы получим сообщение об ошибке, из-за присутствия неполномиального выражения  $-e^{-x^2-y^2}$ . Однако, так как  $-e^{-x^2-y^2}$  не может равняться нулю, то мы можем этот множитель игнорировать.

$$\Rightarrow \text{Solve}[\{(-1 + 2x^2)y == 0, x(-1 + 2y^2) == 0\}, \{x, y\}]$$

$$\{\{x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}\}$$

$$\Rightarrow d[x_, y_] = \partial_{\{x,2\}} f[x, y] \partial_{\{y,2\}} f[x, y] - (\partial_{x,y} f[x, y])^2;$$

$$\Rightarrow d[0,0]$$

$$-1 \quad \leftarrow \text{отрицательное число, нет экстремума}$$

$$\Rightarrow d[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$$

$$\frac{4}{e^2}$$

$$\Rightarrow \partial_{\{x,2\}} f[x, y] /. \{x \rightarrow -1/\sqrt{2}, y \rightarrow -1/\sqrt{2}\}$$

$$-\frac{2}{e}$$

$$\leftarrow \text{относительный максимум}$$

$$\Rightarrow d[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$$

$$\frac{4}{e^2}$$

$$\Rightarrow \partial_{\{x,2\}}f[x,y]/.\{x \rightarrow -1/\sqrt{2}, y \rightarrow 1/\sqrt{2}\}$$

$$\frac{2}{e}$$

← относительный минимум

$$\Rightarrow d[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$$

$$\frac{4}{e^2}$$

$$\Rightarrow \partial_{\{x,2\}}f[x,y]/.\{x \rightarrow 1/\sqrt{2}, y \rightarrow -1/\sqrt{2}\}$$

$$\frac{2}{e}$$

← относительный минимум

$$\Rightarrow d[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

$$\frac{4}{e^2}$$

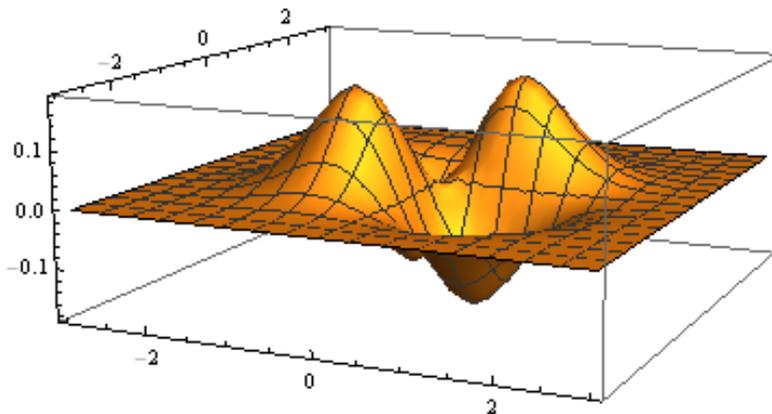
$$\Rightarrow \partial_{\{x,2\}}f[x,y]/.\{x \rightarrow 1/\sqrt{2}, y \rightarrow 1/\sqrt{2}\}$$

$$-\frac{2}{e}$$

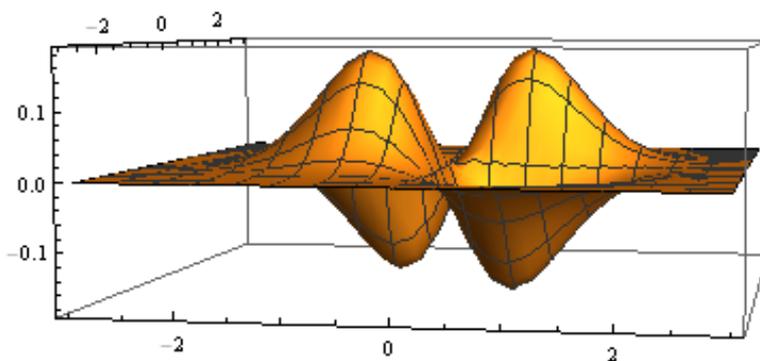
← относительный максимум

Изобразим поверхность, рассматривая ее с двух различных точек зрения:

$\Rightarrow \text{Plot3D}[f[x,y], \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 30, \text{ViewPoint} \rightarrow \{1.391, -3.001, 0.712\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$



$\Rightarrow \text{Plot3D}[f[x,y], \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 30, \text{ViewPoint} \rightarrow \{0.617, -3.318, 0.245\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$



Команда D, дает частную производную функции нескольких переменных. Все другие переменные рассматриваются как константы. Если  $f$  функция от двух переменных  $x$  и  $y$ , и  $y$  есть функция от  $x$ , то D вычисляет производную неправильно.

- Dt – дает полный дифференциал функции.
- Dt[f[x,y]] - возвращает полный дифференциал от  $f[x,y]$ .
- Dt[f[x,y],x] - возвращает полный дифференциал от  $f[x,y]$  по переменной  $x$ .

Конечно,  $f$  может быть функцией более чем двух переменных.

7. Пусть  $z = \sin xy$ . Пусть  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $dx = \Delta x = 0.03$ ,  $dy = \Delta y = 0.02$ . Вычислить  $dz$  и сравнить с  $\Delta z$ .

Решение

$$\Rightarrow z: = f[x_, y_] = \text{Sin}[xy];$$

$$\Rightarrow \Delta z = f[x + \Delta x, y + \Delta y] - f[x, y];$$

$$\Rightarrow \text{Dt}[z]/. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, \text{Dt}[x] \rightarrow 0.03, \text{Dt}[y] \rightarrow 0.02\}$$

$$-0.0332917$$

$$\Rightarrow \Delta z / (. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, \Delta x \rightarrow 0.03, \Delta y \rightarrow 0.02\} )$$

$$-0.0364571$$

8. Использовать дифференциалы для аппроксимации  $e^{0.1}\sqrt{4.01}$  и определить процент погрешности оценки.

Решение

Мы используем тот факт, что 0.01 близко к 0, и 4.01 близко к 4.

$$\Rightarrow f[x_, y_] := \text{Exp}[x]\text{Sqrt}[y];$$

$$\Rightarrow \text{approximation} = f[0,4] + \text{Dt}[f[x, y]] /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 4, \text{Dt}[x] \rightarrow$$

$$0.1, \text{Dt}[y] \rightarrow 0.01\}$$

$$2.2025$$

$$\Rightarrow \text{exactvalue} = f[0.1, 4.01]$$

$$2.2131$$

$$\Rightarrow \text{percenterror} = \text{Abs}[\text{approximation} - \text{exactvalue}] / \text{exactvalue} * 100;$$

$$\text{Print}["\text{The error is }", \text{percenterror}, "\%"]$$

$$\text{The error is } 0.479103 \%$$

9. Используйте дифференциал для аппроксимации количества металла в консервной банке с высотой 30 см и радиусом 10 см, если толщина металла в стенке цилиндра 0.05 см, а сверху и снизу 0.03.

Решение

$$\Rightarrow v: = \pi r^2 h;$$

$\Rightarrow Dt[v]/. \{h \rightarrow 30, r \rightarrow 10, Dt[r] \rightarrow 0.05, Dt[h] \rightarrow 0.06\}$   
 113.097

Количество металла 113 см<sup>3</sup>.

10. Если три транзистора  $R_1, R_2, R_3$  ом соединены параллельно, их эффективное сопротивление равно  $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$  ом. Если резисторы 20 ом, 30 ом, 50 ом, каждый с погрешностью 1% соединены параллельно, какой диапазон сопротивления возможен при такой комбинации?

Решение

$$\Rightarrow f[R1_, R2_, R3_] := \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}};$$

$$\Rightarrow f[20,30,50]//N$$

9.67742

$$\Rightarrow Dt[f[R1, R2, R3]]/. \{R1 \rightarrow 30, R2 \rightarrow 30, R3 \rightarrow 50, Dt[R1] \rightarrow 0.2, Dt[R2] \rightarrow 0.3, Dt[R3] \rightarrow 0.5\}$$

0.1005917

Комбинированное сопротивление  $9.67742 \pm 0.1005917$ .

Кратные интегралы или поверхностные, объединяет команда Integrate.

- Integrate [f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}] оценивает двойной интеграл  $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y) dy dx$
- Integrate [f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},{z,zmin,zmax}] оценивает тройной интеграл  $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} f(x, y, z) dz dy dx$ .

Повторные интегралы высшего порядка оцениваются подобным способом. Следует отметить, что самая правая переменная в команде Integrate вычисляется в первую очередь. В качестве альтернативы можно использовать символ интегрирования из палитры.

Если интеграл таков, что он не может быть оценен, используем:

- NIntegrate [f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}] вычисляет числовое приближение значения интеграла  $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y) dy dx$ .
- NIntegrate [f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},{z,zmin,zmax}] вычисляет приближенное числовое значение тройного интеграла  $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} f(x, y, z) dz dy dx$ .

Повторные интегралы высшего порядка аппроксимируются подобным способом. Функция NIntegrate применима и для одинарных интегралов.

11. Найти центр масс пластинки, ограниченной параболой  $y = 9 - x^2$  и осью  $x$ , если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от оси  $x$ .

Решение

Пусть  $R$  – область, ограниченная  $y = 9 - x^2$  и осью  $x$ .

$\Rightarrow \text{Plot}[9 - x^2, \{x, -3, 3\}]$

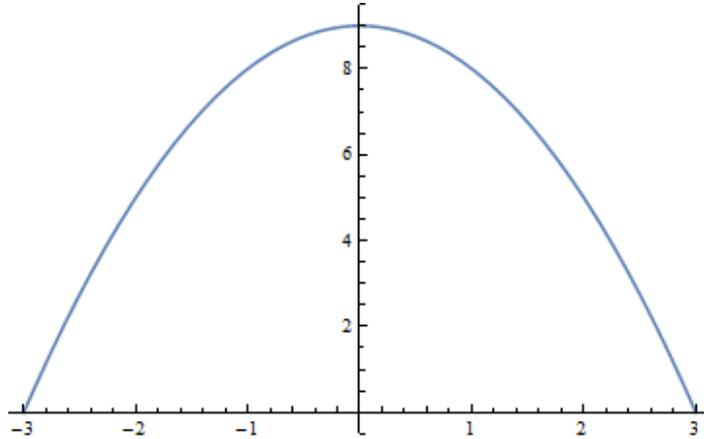


График пересекает ось абсцисс в точках  $-3$  и  $3$ . Координаты центра масс  $(M_y/M, M_x/M)$ , где

$$M_y = \text{момент относительно оси } y = \iint_R x \rho(x, y) dA$$

$$M_x = \text{момент относительно оси } x = \iint_R y \rho(x, y) dA$$

$$M = \text{масса листовых пластин} = \iint_R \rho(x, y) dA$$

Функция плотности  $\rho(x, y) = ky$

$$\Rightarrow \rho[x, y] = ky;$$

$$\Rightarrow m_y = \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} x \rho[x, y] dy dx$$

0

$$\Rightarrow m_x = \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} y \rho[x, y] dy dx$$

$$\frac{23328k}{35}$$

$$\Rightarrow m = \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} \rho[x, y] dy dx$$

$$\frac{648k}{5}$$

$$\Rightarrow \{m_y/m, m_x/m\}$$

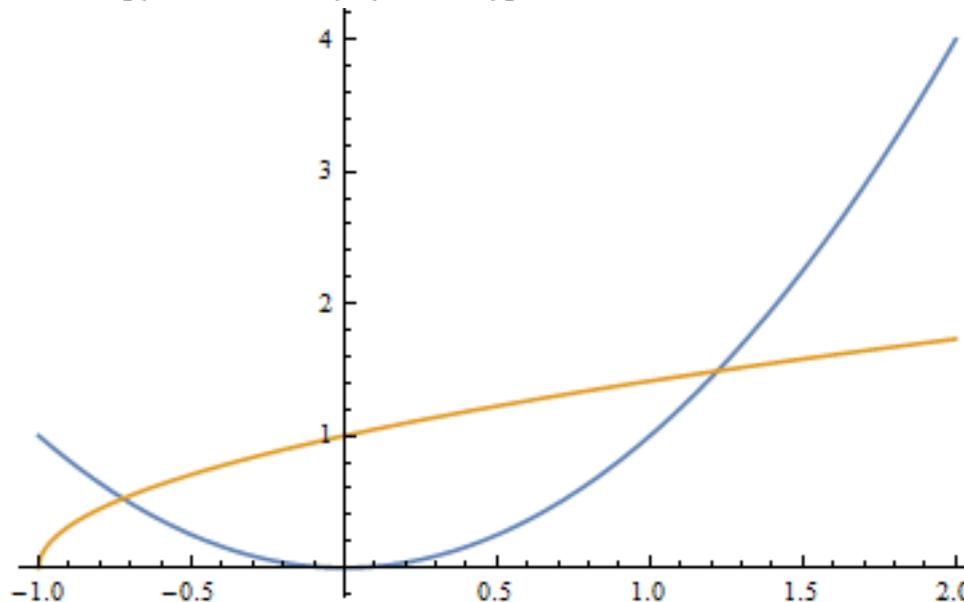
$$\left\{0, \frac{36}{7}\right\}$$

12. Посчитать объем под параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и выше области ограниченной  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x+1}$ .

Решение

Объем ограниченный поверхностью  $z = f(x, y)$  и плоскостью  $x-y$ , над областью  $R$ , является  $\iint_R f(x, y) dA$ . Сначала давайте посмотрим на  $R$ .

$\Rightarrow \text{Plot}[\{x^2, \sqrt{x+1}\}, \{x, -1, 2\}]$



Далее мы находим точки пересечения. Из-за сложного характера решения, мы получим численное приближение.

$\Rightarrow \text{NSolve}[x^2 == \sqrt{x+1}]$

$\{\{x \rightarrow 1.22074408460576\}, \{x \rightarrow -0.7244919590005159\}\}$

Теперь мы можем выразить объем в виде двойного интеграла.

$$\Rightarrow \int_{-0.724492}^{1.22074} \int_{x^2}^{\sqrt{x+1}} (x^2 + y^2) dy dx$$

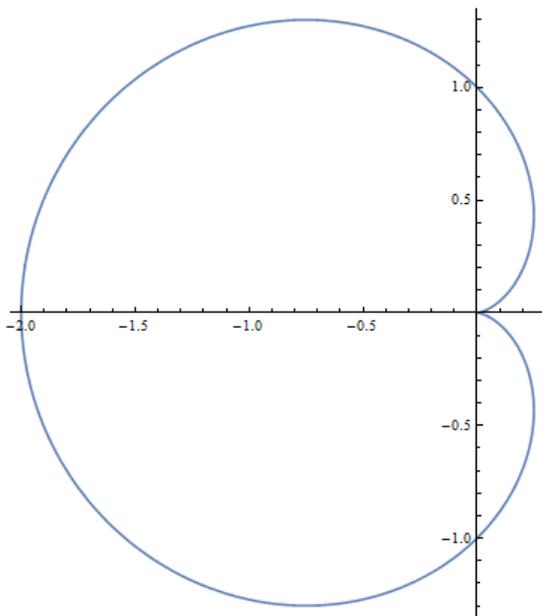
1.1173827582229159

13. Найти объем под полусферой  $z = 4 - x^2 - y^2$  над областью  $x-y$ , ограниченной кардиоидой  $r = 1 - \cos \theta$ .

Решение

Переведем задачу в цилиндрические координаты. Так как  $r^2 = x^2 + y^2$ , то уравнение полусферы  $z = 4 - r^2$ . Область интегрирования  $R$ , является кардиоида, показана на рисунке.

$\Rightarrow \text{PolarPlot}[1 - \text{Cos}[\theta], \{\theta, 0, 2\pi\}]$



$$\begin{aligned} \text{Объем } V &= \iint_R (4 - r^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} (4 - r^2) r dr d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos[\theta]} (4 - r^2) r dr d\theta \\ &\frac{61\pi}{16} \end{aligned}$$

14. Найти объем «конус мороженого» ограниченного конусом  $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$  и сферой  $x^2 + y^2 + (z - 9)^2 = 9$ .

Решение

Требуемый объем представляется в виде тройного интеграла. Эту задачу проще решать в цилиндрических координатах. Во-первых, перепишем уравнение сферы, решая для  $r$  через  $x$  и  $y$ .

$$\Rightarrow \text{Solve}[x^2 + y^2 + (z - 9)^2 == 9, z]$$

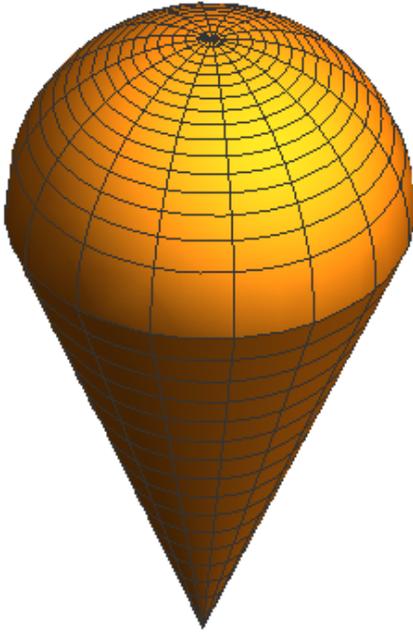
$$\{\{z \rightarrow 9 - \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}, \{z \rightarrow 9 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}\}$$

С помощью второго решения и заменяя  $x^2 + y^2$  на  $r^2$ , уравнение сферы становится  $z = 9 + \sqrt{9 - r^2}$ . Уравнение конуса  $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$  становится  $z = 3r$ . теперь мы можем изобразить эскиз необходимой нам поверхности.

$$\Rightarrow \text{cone} = \text{RevolutionPlot3D}[3r, \{r, 0, 3\}, \{\theta, 0, 2\pi\}];$$

$$\Rightarrow \text{hemisphere} = \text{RevolutionPlot3D}[9 + \sqrt{9 - r^2}, \{r, 0, 3\}, \{\theta, 0, 2\pi\}];$$

$$\Rightarrow \text{Show}[\text{cone}, \text{hemisphere}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 2\}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False}]$$



Для вычисления объема, заметим, что проекция области  $x$ - $y$  представляет собой круг. Для того чтобы определить его радиус, мы находим пересечение конуса и полусферы.

$$\Rightarrow \text{Solve}[3r == 9 + \sqrt{9 - r^2}]$$

$$\{\{r \rightarrow 3\}\}$$

Проекция представляет собой окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Требуемый объем.

$$\Rightarrow \int_0^2 \int_0^3 \int_{3r}^{9 + \sqrt{9 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

45

15. Имеется пересечение кругового цилиндра радиуса 3 и сферы радиуса 5. Вычислить объем пересечения.

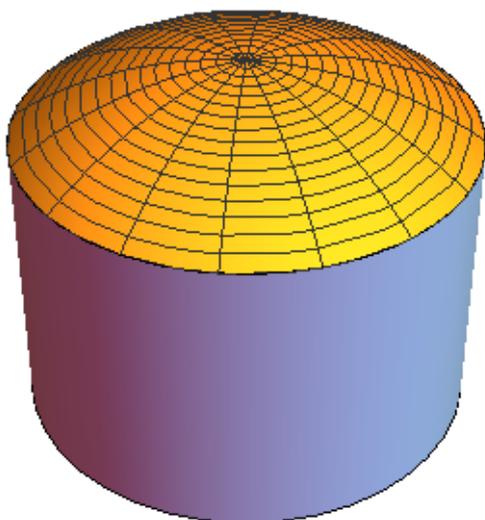
Решение

Легко работать в цилиндрических координатах. Уравнение сферического купола имеет вид  $z = \sqrt{25 - r^2}$ . Он будет пересекать цилиндр, когда  $r = 3$ . Высота цилиндра 4.

$$\Rightarrow \text{cylinder} = \text{Graphics3D}[\text{Cylinder}[\{\{0,0,0\}, \{0,0,4\}\}, 3]];$$

$$\Rightarrow \text{cap} = \text{RevolutionPlot3D}[\sqrt{25 - r^2}, \{r, 0, 3\}, \{\theta, 0, 2\pi\}];$$

$$\Rightarrow \text{Show}[\text{cylinder}, \text{cap}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 5\}]$$



Проекция твердого тела представляет собой окружность радиуса 3, с центром в начале координат.

$$\Rightarrow \text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\frac{122\pi}{3}$$

16. Найти момент инерции твердой полусферы радиуса  $a$ , если его плотность равна расстоянию до центра основания.

Решение

Момент инерции относительно оси  $z$   $\iiint_G (\delta(x, y, z))^2 \sigma(x, y, z) dV$ , где  $\delta(x, y, z)$  расстояние от точки  $(x, y, z)$  до оси  $z$  и  $\sigma(x, y, z)$  есть плотность в точке  $(x, y, z)$ . В этой задаче мы должны использовать сферическую систему координат:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2} = \rho \sin \phi$$

$$\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$$

$$\Rightarrow \delta = \rho \sin[\phi];$$

$$\sigma = \rho;$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \delta^2 \sigma \rho^2 \sin[\phi] \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\frac{2a^6\pi}{9}$$

## Список литературы

- 1) Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
- 2) Зюзьков В.М. Начала компьютерной алгебры. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – 127с.
- 3) Don Eugene. Shaum's Outline of Mathematica, 2ed. - McGram Hill Professional, 2009. – 384с.
- 4) Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. — М.: наука, 1978 – 576с.
- 5) Босс В. Лекции по математике: анализ. – М.: Едитория УРСС, 2004. – 216с.
- 6) Mathematica [Электронный ресурс]. – URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Mathematica>.